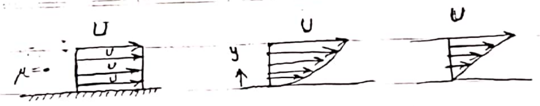
ρ

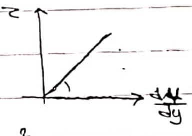
γ

μ



$\tau = \mu \frac{du}{dy}$

شیب



$P = P_{atm} + \gamma h$

$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{y} + Z_2$

هد $= \frac{\text{انرژی}}{\text{وزن}}$

η

$\frac{mgZ}{mg} = Z$

$\frac{1}{2} \frac{mV^2}{mg}$

نیروها — سطحی / حجمی

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

جریان لزج : برای مطالعه در این بخش دو دسته جریان را در نظر می‌گیریم

الف) جریان حول اجسامی نظیر ایرفویل که هیچ نوع دیواره محدود کننده ای ندارد و آن را جریان خارجی گویند

ب) هرگاه جریان با سطح جامدی که سطح آن را تشکیل دهد محدود شود مانند جریان داخل لوله‌ها را جریان داخلی گویند

اینک به جریان های خارجی می‌پردازیم

یادآوری معادلات ناویر استوکس :

$\overset{*}{a_x}$ قبلاً ← دوم نیوتون صفحه بعدی

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$N.S_x$ ΣF

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$N.S_y$

$N.S_z$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

$$\vec{V}=u(x,y,z,t)\hat{i}+v(x,y,z,t)\hat{j}+w(x,y,z,t)\hat{k}$$

$$^{*}a_x=\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\overset{u}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)}+\frac{\partial u}{\partial y}\overset{v}{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)}+\frac{\partial u}{\partial z}\overset{w}{\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)}+\frac{\partial u}{\partial t}\overset{1}{\left(\frac{\partial t}{\partial t}\right)}$$

صفحه قبل

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0}$$ معادله پیوستگی

$$\int_{C.S}\rho V\,dA=0$$

این معادلات دارای چهار مجهول هستند (u و v و w و P) که

بنابراین این معادلات را می‌توان با معادلات پیوستگی جریان تراکم‌ناپذیر

و $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\right)$ ترکیب

به طور کلی این معادلات بسیار پیچیده اند چون معادله با مشتق جزئی هستند و هم کوپل هستند و هم مشتق درجه دوم

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

و مشکل اصلی در حل وجود عبارت‌های شتاب در جابجایی غیرخطی ($u\frac{\partial u}{\partial x}$ و $w\frac{\partial u}{\partial z}$ و $v\frac{\partial u}{\partial y}$ و ...) می‌باشد

حالت‌های خاصی وجود دارد که به دلیل شکل هندسی سیستم جریان

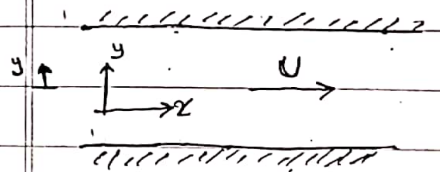
عبارت‌های شتاب جابجایی از بین می‌رود و امکان حل دقیق فراهم

می‌شود. چند نوع حالت خاص را با هم بررسی خواهیم کرد

الف- جریان آرام و پایای سیال در بین صفحات موازی ساکن:

در این حالت یک جریان دوبعدی بین دو صفحه افقی نامحدود موازی را

در نظر می‌گیریم



$V=0$

$u=u(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=0} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0}$

$U=U(y)$

$0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ → $\frac{d^2u}{dy^2}$

$\frac{\partial u}{\partial t}=0$ دائمی

$\frac{\partial u}{\partial y}=0$

$u\frac{\partial u}{\partial x}=0$

دوبعدی $w\frac{\partial u}{\partial z}$

از معادله دوم

$-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho(-g)=0$

$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y}=-\rho g}$

Int نسبت به y

$P=-\rho g y+f(x)$

مشتق نسبت به x

$\frac{\partial p}{\partial x}=f'(x)$

P تابعی از y و x است ولی تغییرات آن فقط تابعی از x ها

از اولی

$\boxed{0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{d^2u}{dy^2}}$

$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$

Int نسبت به y

$\frac{du}{dy}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y+C_1 \rightarrow u=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y^2+C_1y+C_2$

$\begin{cases} y=h \rightarrow u=0 \\ y=-h \rightarrow u=0 \end{cases}$

شرایط عدم لغزش

سرعت سیال در تماس با سطح جامد ساکن برابر صفر

$0=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h^2+C_1h+C_2$

$0=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h^2-C_1h+C_2$

$C_2=\frac{-1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h^2 \rightarrow \boxed{C_1=0}$

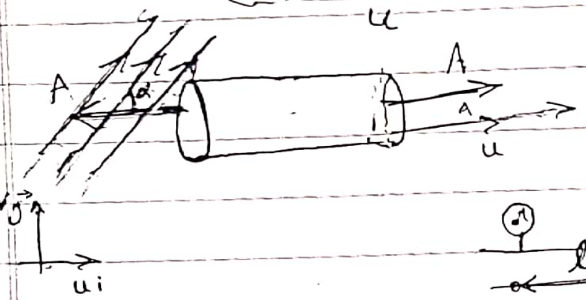
www.nahal-alma.com

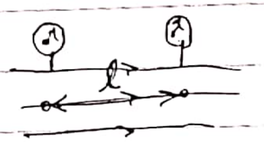
Scanned by CamScanner

$$\frac{D\square}{Dt} = \frac{\partial\square}{\partial t} + u\frac{\partial\square}{\partial x} + v\frac{\partial\square}{\partial y} + w\frac{\partial\square}{\partial z}$$

$$\Sigma F = ma$$

$$\vec{V}\cdot\vec{A} = |V||A|\cos\alpha$$





تقریب

$$\frac{\partial P}{\partial x} \approx -\frac{\Delta P}{\Delta L}$$

$$Q^{\circ} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} b\left(-4\frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{2\mu} b\frac{\Delta P}{\Delta L}\left(\frac{4}{3}h^3\right)$$

$$\bar{V}\pi R^2 = \frac{1}{2\mu} b\frac{\Delta P}{\Delta L}\left(\frac{4}{3}h^3\right) \Rightarrow \bar{V} = \frac{b}{2\mu\pi R^2}\frac{\Delta P}{\Delta L}\left(\frac{4}{3}h^3\right)$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}y^2 - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^2 = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2 - h^2)$$

$$y = 0 \longrightarrow u = u_{max} \longrightarrow$$

$$U_{max} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(-h^2)$$

$$Q' = \int V dA = \int \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2 - h^2) b\, dy$$

$$= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} b\left(\frac{y^3}{3} - h^2 y\right)\Big|_{-h}^{h}$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) b\left(-4\frac{h^3}{3}\right)$$

در دلش منفی دارد چون فشار افت میکند در لوله

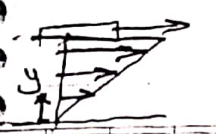
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

حجمی

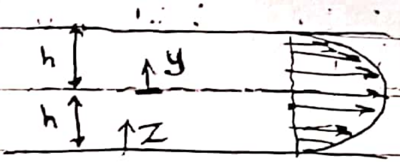
نیرو های سطحی

برای جریان لزج و پایا



$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2-h^2)$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$



$$Z = y + h \longrightarrow y = Z - h \longrightarrow dy = dZ$$

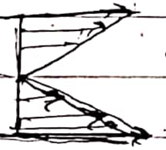
$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{\partial u}{dZ} \longrightarrow u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left((Z-h)^2 - h^2\right)$$

مشتق

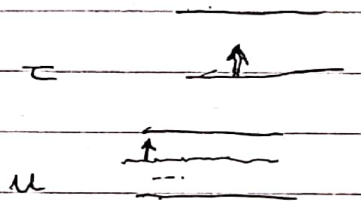
$$\tau = \mu\left(\frac{1}{2\mu}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(2(Z-h)\right)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}(Z-h) = \frac{\partial P}{\partial x}(Z-h) = \left(-\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)(Z-h)$$

$$= \frac{\Delta P}{\Delta l}(h-Z)$$



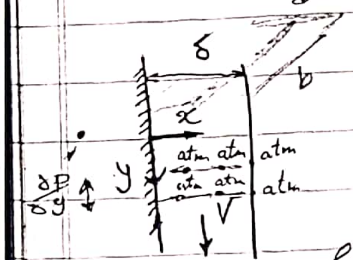
تنش



نکته :

مثال) یک سیال نیوتونی لزج و تراکم ناپذیر روی سطحی عمودی به صورت جریان آرام/ به طرف پایین در حال حرکت است، ضخامت لایه‌ی تحت تاثیر فشار atm می‌باشد توضیح سرعت را بیابید.

وپایا



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + V\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t} + u\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$

پایا — دوبعدی

از معادله پیوستگی

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

اختلاف سرعت است که اصطکاک ایجاد می‌کند

$\tau = \mu \frac{dV}{dx}$ عمود بر راستای سرعت

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g + \mu \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

($\frac{\partial P}{\partial y} \to 0$ علت شکل، $\rho g \to \gamma$)

$$\rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\gamma}{\mu} \rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{\gamma}{\mu} x + C_1$$

$$\rightarrow V = -\frac{\gamma x^2}{2\mu} + C_1 x + C_2$$

@ $x = 0 \rightarrow V = 0 \rightarrow C_2 = 0$

@ $x = \delta \rightarrow \tau = 0 \rightarrow \mu \frac{dV}{dx} = 0$

$$\mu \frac{dV}{dx} = \mu\left(-\frac{\gamma}{\mu} x + C_1\right)\Big|_{x=\delta} = 0$$

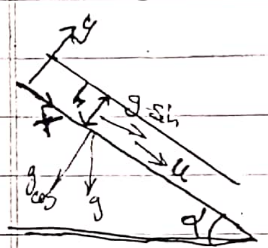
$$C_1 = \frac{\gamma \delta}{\mu}$$

$$V = -\frac{\gamma x^2}{2\mu} + \frac{\gamma \delta}{\mu} x$$

$\tau = \mu \frac{dV}{dx}\Big|_{x=0}$ $\qquad \bar{V} = \frac{Q}{b\delta}$

$$Q = \int V dA = \int_0^{\delta} \left(-\frac{\gamma x^2}{2\mu} + \frac{\gamma \delta}{\mu} x\right) b\,dx$$

مثال): یک لایه مایع لزج با ضخامت ثابت h روی صفحه‌ی مایل با زاویه α به صورت آرام جریان داره فرض کنید که جریان سیال پایا است و دوبعدی و تراکم ناپذیر است و سطح آزاد سیال تحت فشار اتمسفر قرار دارد. دبی جرمی را برای عرض b بدست آورید



پایا

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

$$N.S_x: \ \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + V\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + g_x \rho + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin\alpha + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (I)$$

Scanned by CamScanner

$$N.S_y : \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \cos\alpha \longrightarrow$$

$$P = -\rho g y \cos\alpha + f(x) \quad (y = h \quad \text{شرط مرزی})$$

$$P = P_{atm} \quad \text{در سطح آزاد}$$

$$P_{atm} = -\rho g h \cos\alpha + f(x)$$

$$f(x) = P_{atm} + \rho g h \cos\alpha$$

$$f(x) \checkmark \longrightarrow P = -\rho g y \cos\alpha + (P_{atm} + \rho g h \cos\alpha)$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = 0} \quad (II)$$

$$I, II \longrightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\gamma}{\mu}\sin\alpha$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\gamma y}{\mu}\sin\alpha + C_1$$

$$u = -\frac{\gamma y^2}{2\mu}\sin\alpha + C_1 y + C_2$$

سرعت سیال در سطح تماس با جامد برابر سرعت جامد می باشد

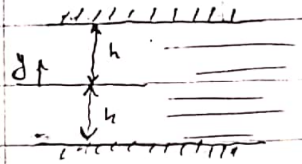
at $y = 0 \longrightarrow u = 0 \longrightarrow C_2 = 0$ — شرط عدم لغزش

at $y = h \longrightarrow \frac{du}{dy} = 0$ — تنش برشی نداریم

جریان بین دو صفحه ثابت و یا متحرک (جریان کوات)

جریان آرام بین دو صفحه تخت موازی که یکی ثابت و دیگری متحرک باشد

جریان کوات گفته می شود



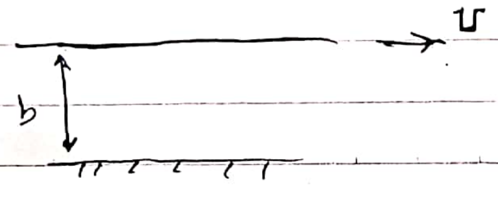
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ معادله پیوستگی

$$N.S_y \longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = f(x)$$

$$\xrightarrow{N.S} \boxed{u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2}$$

حال برای این سیال →



شرایط مرزی $at\ y=0 \longrightarrow u=0 \rightsquigarrow C_2=0$

$at\ y=b \longrightarrow u=U$

$$U=\frac{\partial P}{\partial x}\frac{b^2}{2\mu}+C_1 b \longrightarrow \boxed{C_1=\frac{U}{b}-\frac{\partial P}{\partial x}\frac{b}{2\mu}}$$

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{b}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}y+\frac{U}{b}y$$

$$\longrightarrow u=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2-by)+\frac{U}{b}y$$

جریان کوات ساده $\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x}=0 \longrightarrow \boxed{u=\frac{U}{b}y}$

در غیر ساده باید تحلیل کنیم
$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial P}{\partial x}<0\\ \frac{\partial P}{\partial x}>0\end{array}\right.$

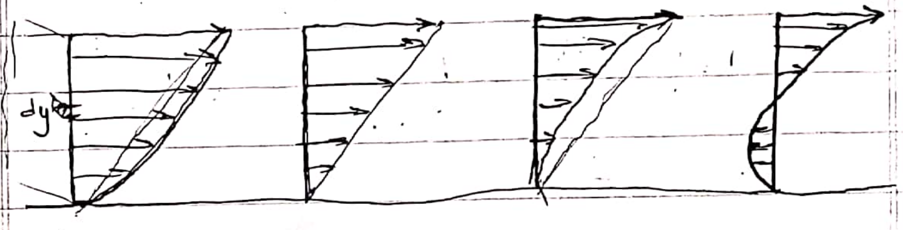
شیب تغییرات فشار می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد. صفر بودن تغییرات فشار سبب خطی شدن جریان می شود $u=\frac{U}{b}y$ که به آن جریان کوات ساده می گویند.

می توان توضیح سرعت را در جریان کوات را می توان برحسب کمیت های بی بعد نوشت. اگر توضیح سرعت را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{u}{U}=\frac{y}{b}-\frac{b^2}{2\mu U}\left(\frac{y}{b}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

✓ در این رابطه به ضریب $\left(-\frac{b^2}{2\mu U}\right)\times\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$ در اصطلاح شیب تغییرات بی بعد فشار گفته می شود و آن را با P نمایش می دهند.

$$\frac{u}{U}=\frac{y}{b}+P\left(\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$



$\frac{\partial P}{\partial x}<0$ $\quad\frac{\partial P}{\partial x}=0$ $\quad\frac{\partial P}{\partial x}>0$ $\quad\frac{\partial P}{\partial x}>>0$

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

به جای yها y_{max} مقدار را قرار می‌دهیم

$$\frac{u_{max}}{U} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{P}\right) + P\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{P}\right)\left(1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{P}\right)\right)$$

$$\frac{u_{max}}{U} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{P}\right)\left\{1+P-\frac{P}{2}-\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{P}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{P}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{P+1}{P}\right)\left(\frac{P+1}{2}\right) = \frac{1}{4P}(1+P)^2$$

$$\dot{Q} = \int V\,dA = \int_0^b \left(\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2 - by) + \frac{U}{b}y\right) dy$$

$$= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2}\right) + \frac{U}{b}\left(\frac{b^2}{2}\right)$$

عدد b را قرار دادیم به جای y یعنی از صفر تا b

$$= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left(-\frac{b^3}{6}\right) + \frac{1}{2}Ub^2$$

$$= \frac{-b^2}{2\mu U}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{bU}{6} + \frac{1}{2}Ub^2$$

* یک U ضرب کرده و تقسیم می‌کنیم

$$\dot{Q} = \frac{1}{6}bUP + \frac{1}{2}Ub^2 = \frac{1}{2}Ub\left(b + \frac{P}{3}\right)$$

به جای این تصحیح شد

مشتق: $\frac{du}{dy} = U(\ldots)$

سرعت max: $\frac{u}{U} = (\ldots\ldots) \rightarrow u = U(\ldots\ldots)$

$$\frac{du}{dy} = 0 \rightarrow U\left(\frac{1}{b} + P\left(\frac{1}{b} - \frac{2y}{b^2}\right)\right) = 0$$

$$1 + P\left(1 - \frac{2y}{b}\right) = 0 \rightarrow 1 - \frac{2y}{b} = \frac{-1}{P}$$

$$1 + \frac{1}{P} = \frac{2y}{b} \rightarrow \boxed{y_{max} = \frac{b}{2}\left(1+\frac{1}{P}\right)}$$

Scanned by CamScanner

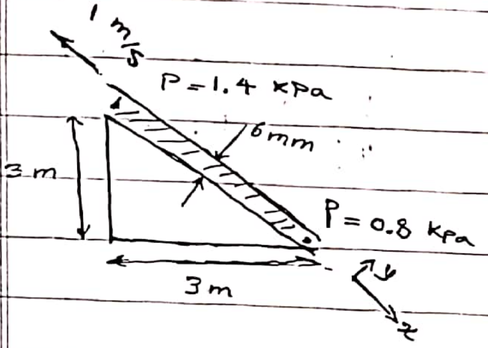
Pa.s

مثال: مطابق شکل مایعی با $\rho = 850 \ \frac{kg}{m^3}$ و $\mu = 0.08$

از بین دو صفحه موازی که یکی ثابت و دیگر متحرک است جریان دارد.

مطلوب است تعیین معادله توضیع سرعت و سرعت ماکسیمم و دبی حجمی و تنش

برش بر صفحه فوقانی:



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$N.S_x \longrightarrow \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$N.S_y \text{ از} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = f'(x)}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin\alpha + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\gamma}{\mu}\sin\alpha$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \simeq \frac{\Delta P}{\Delta L} = \frac{P_2 - P_1}{L} = \frac{1400 - 800}{\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{600}{3\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= 100\sqrt{2} = 140$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

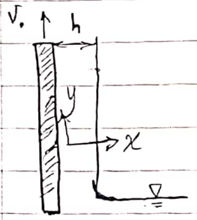
$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{0.08} \times 140 - \frac{850 \times 9.8}{0.08}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -71137.5$$

$$\frac{du}{dy} = -71137.5y + C_1 \longrightarrow u = -35568.75y^2 + C_1 y + C_2$$

at $y = 0 \longrightarrow u = 0 \longrightarrow \boxed{C_2 = 0}$

Scanned by CamScanner

نمونه: یک تسمه پهن در یک مخزن مایع لزج با سرعت ثابت V_0 حرکت می‌کند و مایعی سیال با ضخامت h به بالا کشیده فرض بر آن که جریان پایا و آرام و یکنواخت باشد با کمک معادلات ناویر استوکس عبارت مناسب برای سرعت متوسط بیابید



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

N.S x

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

N.S y:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho g = 0$$

در جهت‌های y ها

at $y = 0.006\ m \rightarrow u = -1$

$$-1 = -35568.75(0.006)^2 + C_1(0.006)$$

$$C_1 = 46.75$$

$$u = -35568.75\,y^2 + 46.75\,y$$

$$\frac{du}{dy} = -71137.5\,y + 46.75 = 0$$

$$y_{max} = \frac{46.75}{71137.5} \simeq 0.66\ mm$$

$$U_{max} = \checkmark$$

$$\dot{Q} = \int V\,dA = \int_0^{0.006}(-35568.75\,y^2 + 46.75\,y)\,b\,dy$$

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}\Big|_{y=0.006}$$

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

$$0 = -\rho g + \mu \frac{d^2V}{dx^2}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\rho g}{\mu} = \frac{\gamma}{\mu}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\gamma}{\mu}x + c_1$$

$$V = \frac{\gamma x^2}{2\mu} + c_1 x + c_2$$

at $x = 0 \longrightarrow V = V_0$

at $x = h \longrightarrow \tau = 0 \longrightarrow \frac{dV}{dx} = 0$ $\Big\}$ c_1, c_2 ✓

$$Q = \int_0^h V\,dx = ✓$$

$$\bar{V}h = Q \longrightarrow \bar{V} = \frac{Q}{h}$$ ✓

www.nahal-alma.com

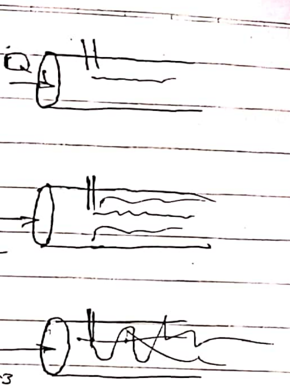
جریان داخل لوله‌ها : برای تمام جریان‌هایی که در این فصل بررسی می‌کنیم فرض می‌کنیم که لوله پر از سیال در حال انتقال است بنابراین لوله‌های سیمانی که در آن آب باران جریان دارد بدون آنکه آنها را پر کرده باشد مد نظر ما نیست به چنین جریان‌هایی، جریان‌های کانال باز می‌گویند که بعدها به آن می‌پردازیم.

اختلاف بین جریان در لوله و جریان در کانال باز در مکانیزم اولیه جهت جریان یافتن نهفته است، در جریان‌های کانال باز عامل اصلی جریان نیروی گرانش است مانند جریان یافتن آب از روی یک تپه ولی در جریان‌های داخل لوله اگرچه عامل گرانش مهم است ولی عامل اصلی اختلاف فشار در طول لوله است. بدیهی است که اگر لوله پر از سیال نباشد امکان ندارد ما این اختلاف فشار را داشته باشیم

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

$Re < 2300$ رژیم آرام و لیمینار



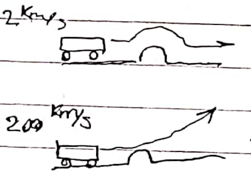
$2300 < Re < 4000$ گذر

$Re > 4000$ رژیم متلاطم، توربولانس

$\propto \rho$
$\propto V$
$\propto D$
$\propto \frac{1}{\mu}$

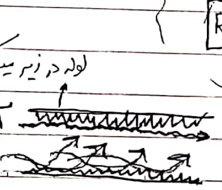
$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

$= \frac{\text{نیروی اینرسی حرکتی}}{\text{نیروی لزجت}}$



سنگ قبر رینولدز

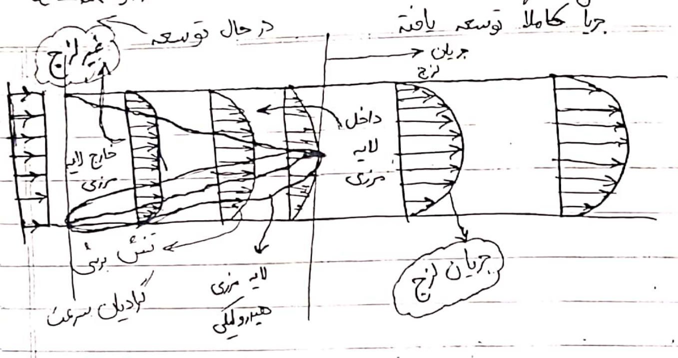
Re R.I.P



مانند دست انداز

و ماشین

$u = u(x,r)$



$X_e = l_e$

تحلیل ابعادی نشان می‌دهد که تنها پارامتر موثر در ناحیه
عدد رینولدز است. برای جریان آرام رابطه‌ی پذیرفته شده برای
طول ناحیه در حال توسعه چنین می‌باشد:

جریان آرام $\longrightarrow \frac{l_e}{D} = 0.06\, Re$ (1)

در جریان متلاطم لایه‌های مرزی سریع‌تر رشد کرده و l_e نسبتاً کوتاه‌تر است
و داریم

جریان متلاطم $\longrightarrow \frac{l_e}{D} = 4.4\, Re^{1/6}$ (2)

مثال: برای روغنی $SG = 0.9$ و $\nu = 3\times10^{-4}\ m^2/s$ لزجت سینماتیکی
درون لوله‌ای به قطر $D = 4cm$ طول ناحیه ورودی را برای دبی

$\nu = \mu/\rho$

الف) $10\ m^3/s$ ب) $1\ m^3/s$

لزجت دینامیکی special gravity

$\nu = \mu/\rho$ لزجت سینماتیکی

$SG = \frac{\rho_{سیال}}{\rho_{آب}} = \frac{\gamma_{سیال}}{\gamma_{آب}}$

الف

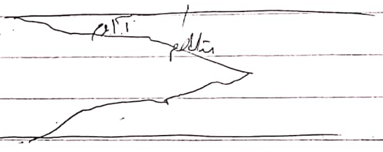
$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{VD}{\mu/\rho} = \frac{VD}{\nu} \rightarrow$

$Q = VA \longrightarrow V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2}$

$$\boxed{Re = \frac{4Q}{\pi D \nu}}$$

$Re = \frac{4\times10^{-3}}{\pi\times4\times10^{-2}\times3\times10^{-4}} = \frac{1000}{3\pi} < 2300$ آرام

(1) $\rightarrow l_e = 0.04\times0.06\times\frac{1000}{3\pi} = \frac{0.8}{\pi} = 0.25\,m$



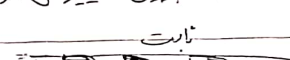
www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

جریان آرام درون لوله

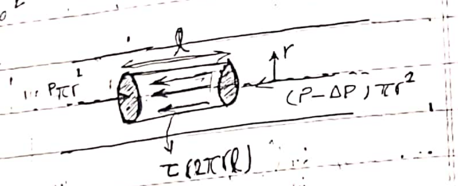
جریان در یک لوله بلند و مستقیم با قطری ثابت می توان که جریان توسعه یافته دانست این به این معنی است که توضیع سرعت در هر مقطع از لوله یکسان است

یعنی توضیع یا پروفیل سرعت در امتداد جریان تغییر نمی کند

یک جزء استوانه ای شکل سیال به طول l و شعاع r که محورش منطبق بر محور لوله است در زمان t در نظر بگیرید چون توضیع سرعت در عرض لوله یکنواخت نیست در ابتدا قسمت های انتهایی دو طرف استوانه در زمان t تغییر می کند اگر جریان توسعه یافته و پایا باشد قسمت های انتهایی استوانه مثل هم می شوند و هیچ قسمتی از جریان شتاب ندارد همچنین شتاب محلی نیز صفرات زیرا جریان پایا بوده و شتاب جابجایی نیز صفر است



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = a_x$$



$a_x = 0$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \sum F_x = m a_x = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow P\pi r^2 - (P-\Delta P)\pi r^2 - \tau(2\pi r l) = 0$$

$$\Delta P \pi r^2 = \tau(2\pi r l)$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{2}\frac{\Delta P}{l} r} \quad **$$

$$* \; r = \frac{D}{2} \rightarrow \tau_{wall} = \frac{1}{2}\frac{\Delta P}{l}\frac{D}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\frac{\Delta P}{l} = \frac{2}{D}\tau_w \rightarrow \boxed{\Delta P = \frac{4l}{D}\tau_w} \; **$$

$$\boxed{\tau = \frac{2\tau_w}{D} r} \; **$$

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

$y \downarrow$ $r \uparrow$

$r = \frac{D}{2} - y$

$dr = -dy$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{du}{-dr} = -\mu \frac{du}{dr}$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta P}{l}\right) r = -\mu \frac{du}{dr}$$

$$\left(\frac{-1}{2\mu} \frac{\Delta P}{l}\right) r\, dr = du$$

$$u = \frac{-\Delta P}{2\mu l} \frac{r^2}{2} + C$$

$r = \frac{D}{2} \rightarrow$ $u = 0$ $\rightarrow C = \frac{\Delta P D^2}{16 \mu l}$

$$u = \frac{-\Delta P r^2}{4\mu l} + \frac{\Delta P D^2}{16\mu l}$$

$$u = \frac{\Delta P D^2}{16\mu l}\left(1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right)$$

*

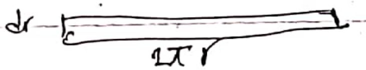
*

سرعت در محور لوله :

$U_{center} \rightarrow r = 0 \rightarrow u = \frac{\Delta P D^2}{16\mu l} = U_c$

$$u = U_c\left(1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right)$$

$Q = \int v\, dA$



$dA = 2\pi r\, dr$

Scanned by CamScanner

$$Q = \int_0^{D/2} U_c \left(1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right) 2\pi r \, dr$$

$$= 2\pi U_c \left(\frac{r^2}{2} - \frac{4}{D^2}\frac{r^4}{4}\right]_0^{D/2}$$

$$= 2\pi U_c \left(\frac{D^2}{8} - \frac{D^2}{16}\right) = 2\pi U_c \left(\frac{D^2}{16}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi D^2}{8} U_c} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi D^2}{4}\, U_c$$

$$\bar{U} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{2} U_c = \boxed{\frac{\Delta P D^2}{32 \mu l}}$$

$$Q = \frac{\pi D^2}{8} U_c = \frac{\pi D^2}{8}\,\frac{\Delta P D^2}{16 \mu l} = \frac{\pi \Delta P D^4}{128 \mu l}$$

$$\boxed{\Delta P = \frac{128 \mu l Q}{\pi D^4}}$$

جریان متلاطم در لوله: در این قسمت فرض بر آنست که ρ و μ ثابت است و ... حرارتی نداریم به گونه‌ای که فقط معادلات پیوستگی و اندازه حرکت (تاثیرات متقابل) فقط باید برای بدست آوردن سرعت و فشار حل شود ...

پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

مومنتوم:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \rho g + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

به علت وجود نوسان در جریان متلاطم هر عبارت سرعت و فشار در معادلات بالا با تغییرات سریع زمان و فضا همراه است یعنی سرعت و فشار سیال به زمان بستگی دارد و دائماً در حال تغییر است برای سادگی بردار فشار و سرعت به صورت حاصل جمع یک مقدار متوسط و نوسان‌های آن نوشته می‌شود خواهیم داشت:

www.nahal-alma.com

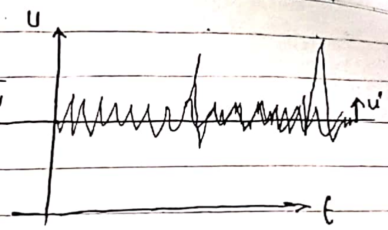
Scanned by CamScanner

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$w = \bar{w} + w'$$

$$p = \bar{p} + p'$$



در این روابط (u' و v' و w' و p') مولفه‌های نوسانات را نشان می‌دهد و ($\bar{u}$ و $\bar{v}$ و $\bar{w}$ و $\bar{p}$) مولفه‌های میانگین یا متوسط زمانی جریان را نشان می‌دهد که می‌تواند از رابطه زیر بدست آید

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt$$

که T زمان تناوب متوسط است

* نوسانات u' انحرافات u نسبت به $\bar{u}$ تعریف می‌شود یعنی

$$\overline{u'} = \overline{u - \bar{u}} = \frac{1}{T}\int_0^T (u-\bar{u})\,dt$$

از این تعریف نتیجه می‌شود که مقدار میانگین یک نوسان صفر است زیرا که

$$= \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T \bar{u}\,dt = 0$$

$$\overline{u} - \overline{\bar{u}} = \bar{u} - \bar{u} = 0$$

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt$$

(1)
$$\begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \\ w = \bar{w} + w' \end{cases}$$

$$\overline{u'} = \overline{u} - \overline{\bar{u}} \rightarrow \boxed{\overline{u'} = 0}$$

$$\bar{u} - \bar{u} = 0$$

$$\overline{u'^2} = \overline{u^2} + \bar{u}^2 - 2u\bar{u} \rightarrow \begin{cases} \overline{u'^2} \neq 0 \\ \overline{u'v'} \neq 0 \end{cases}$$

با توجه به معادله $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ و (1) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad **$$

از * و

از معادله پیوستگی میانگین گرفت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}\right) + \left(\overline{\frac{\partial v}{\partial y}}\right) + \left(\overline{\frac{\partial w}{\partial z}}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{v} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{w} = 0 \quad *$$

از * و **

$$\rightarrow \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

www.nahal-alma.com

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

می‌توان نشان داد که هر مؤلفه از معادله حرکت، پس از میانگین‌گیری زمانی، شامل مقادیر میانگین به اضافه حاصل‌ضرب‌های میانگین می‌شود.

برای نمونه در جهت x می‌توان نوشت:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{dt} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \overline{u'w'}\right)$$

سه عبارت $\left(\left(-\rho \overline{u'^2} \text{ و } -\rho \overline{u'v'} \text{ و } -\rho \overline{u'w'}\right)\right)$ تنش‌های متلاطم نامیده می‌شوند زیرا همان بُعد تنش را داشته و در کنار عبارت‌های تنش نیوتونی آرام یعنی: $\left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \text{ و } \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \text{ و } \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)$ جای می‌گیرد

تنش‌های متلاطم:
- $-\rho \overline{u'^2}$
- $-\rho \overline{u'v'}$
- $-\rho \overline{u'w'}$

تنش‌های آرام:
- $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$
- $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$
- $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$

خوشبختانه در لوله‌ها تنها تنش $-\rho \overline{u'v'}$ در جهت ... و عمود بر دیواره اهمیت دارد و از سایر تنش‌های متلاطم بزرگ‌تر است بنابراین می‌توان از سایر تنش‌ها چشم‌پوشی کرد.

با توجه به این نکته معادله اندازه حرکت (ممنتوم) در امتداد حرکت سیال (امتداد محور xها) برای جریان در لوله‌ها به صورت زیر ساده‌سازی می‌شود:

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

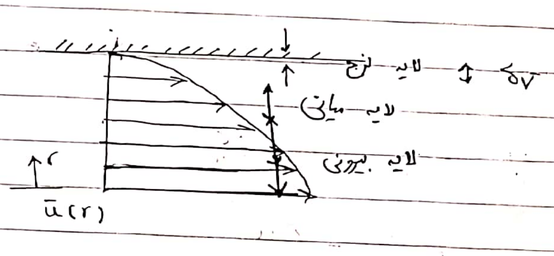
$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}$$

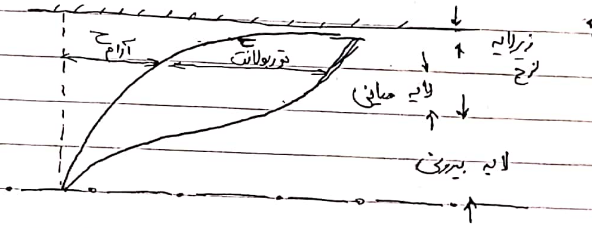
$$\tau = \tau_{\text{آرام}} + \tau_{\text{متلاطم}}$$

$$\begin{cases} \tau_{\text{آرام}} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ \tau_{\text{متلاطم}} = -\rho \overline{u'v'} \end{cases}$$

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

در شکل زیر توضیح تنش آرام و تنش متلاطم اندازه‌گیری شده در عرض لایه
برشی مغشوش نزدیک دیواره نشان داده شده است، برش آرام در نزدیکی دیواره و برش
متلاطم در لایه بیرونی اهمیت دارد، یک ناحیه بینابینی به نام لایه میانی
وجود دارد که در آن هم برش آرام و هم برش متلاطم حائز اهمیت است





اگر δ_v بزرگ باشد زیر لایه لزج زبری دیواره را می‌پوشاند آنگاه زبری
اثر ناچیزی روی جریان خواهد داشت به گونه‌ای که دیواره مانند یک دیوار صاف
عمل می‌کند که چنین شرایطی به صافی هیدرولیکی معروف است

اگر δ_v کوچک باشد اعضای زبری از لوله خارج شده و دیواره زبر است

به طور کلی (زبری) نسبی $\frac{\varepsilon}{D}$ (زبری نسبی) و Re را می‌توان برای تعیین صافی یا زبری لوله
به کار برد این موضوع در مباحث آینده با کمک مقادیر ضریب اصطکاک (f)
مورد بررسی قرار می‌گیرد

✓ توضیح سرعت را نمی‌توانیم برای جریان متلاطم توسعه یافته حل کنیم زیرا $\overline{u'v'}$
نمی‌توان به صورت تحلیلی بدست آورد بنابراین برای $\bar{u}(y)$ روش‌های تجربی
ارائه می‌شود اکنون روش تجربی برای بیان توضیح سرعت با دیواره‌های
صاف را بیان می‌کنیم

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

در ناحیه دیواره مشخصه سرعت و طول عبارتند از سرعت اصطکاک که آن را با u^* (یو استار) نمایش داده و

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

(مشخصه سرعت)

و برای طول که طول لزج که با $\frac{\nu}{u^*}$: مشخصه طول

- توضیح سرعت بدون بعد در یک لوله صاف عبارت از است

- لوله صاف:

لایه لزج: $\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{y u^*}{\nu}$ که $\frac{u^* y}{\nu} < 5$ ← $\frac{u^* \delta_v}{\nu} = 5$

لایه زیر: $\frac{\bar{u}}{u^*} = 2.44 \ln \frac{u^* y}{\nu} + 4.9$ $\quad \frac{u^* y}{\nu} \gg 30 \quad \frac{y}{R} < 0.15$

$y = R - r$

- لوله زبر:

برای این لوله‌ها زیرلایه لزج اهمیت خاصی ندارد زیرا در این شرایط ضخامت زیرلایه لزج به قدری نازک است که هر جسمی های زبری در جریان لوله وارد می‌شود بنابراین فقط یک توضیح لگاریتمی در ناحیه بیرونی لازم است

و خواهیم داشت:

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 2.44 \ln \frac{y}{\epsilon} + 8.5 \qquad \frac{y}{R} < 0.15$$

در ناحیه‌ی بیرونی چه برای لوله‌های صاف و چه برای لوله‌های زبر می‌توان u_{max} را از رابطه زیر بدست آورد (هم برای صاف هم برای زبر)

$$\frac{u_{max} - \bar{u}}{u^*} = 2.44 \ln \frac{R}{y} + 0.8 \qquad \frac{y}{R} < 0.15 \quad (y = R - r)$$

$$1 - \frac{r}{R} < 0.15 \quad \leftarrow \quad \frac{R - r}{R} < 0.15$$

$$\boxed{\frac{r}{R} > 0.85}$$

ناحیه دیوار و ناحیه بیرونی با هم لایه مشترکی را به وجود می‌آورند در لایه مشترک می‌توان معادلات بالا را با هم ترکیب و سرعت ماکسیمم را بدست آوریم که برابر است با:

* لوله صاف: $\frac{u_{max}}{u^*} = 2.44 \ln \frac{u^* R}{\nu} + 5.7$

* لوله زبر: $\frac{u_{max}}{u^*} = 2.44 \ln \frac{R}{\epsilon} + 9.3$

Scanned by CamScanner

توجه داشته باشید که سرعت ماکسیمم یا U_{max} در یک لوله همان سرعت در خط مرکزی لوله است. توضیح سرعت در لوله صاف را می‌توان با استفاده از قانون نمایی استفاده کرد.

$$\frac{\bar{u}(r)}{U_{max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} \quad *$$

معمولاً از جدول زیر استفاده می‌کنیم

R_e	4×10^{3}	10^{5}	10^{6}	$>2\times10^{6}$
n	6	7	9	10

$$Q = \int V dA = \int V (2\pi r) dr = \int u_{max} \left(\frac{R-r}{R}\right)^{1/n} (2\pi r) dr$$

$$\bar{V} = \frac{2\pi U_{max} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} r\,dr}{\pi R^2} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} u_{max}$$

$$V = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} U_{max}$$

سرعت متوسط ← V

سرعت در خط مرکزی لوله ← U_{max}

نمونه) در لوله‌ای به قطر 10 cm آب با سرعت متوسط $1.6\ \frac{m}{s}$ در جریان و تنش برشی دیواره 6.53 Pa و زبری آن 0.046 mm باشد آیا دیواره صاف است یا زبر ($\rho = 1000\ \frac{kg}{m^3}$ و $\nu = 10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$)

$\tau_w = 6.53$ Pa

$\varepsilon = 0.046$ mm

$R = 5$ cm

$V = 1.6\ \frac{m}{s}$

$$\frac{u^* \delta_v}{\nu} = 5$$

$$\delta_v = \frac{5\nu}{u^*}, \qquad u^* = \sqrt{\frac{6.53}{1000}}$$

$$\delta_v = \frac{5\times10^{-6}}{\sqrt{\frac{6.53}{1000}}} = 0.0618$$

چون $\varepsilon < \delta_v$ ← صاف

نمونه: آب در لوله افقی به قطر (0.1 m) با لزجت سینماتیکی ($\nu = 1.004\times10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$) و ($\rho = 998\ \frac{kg}{m^3}$) و دبی حجمی $0.04\ \frac{m^3}{s}$ است. گرادیان فشار برابر $\frac{\Delta P}{l} = 2.59\ \frac{KPa}{m}$ ... تعیین کنید

الف) ضخامت زیر لایه لزج ب) سرعت جریان در مرکز لوله

ج) نسبت تنش برشی متلاطم به تنش برشی آرام در نقطه وسط خط مرکزی لوله و دیواره لوله

www.nahal-alma.com

www.nahaljalma.com

Scanned by CamScanner

سرعت متوسط — سرعت در خط مرکزی لوله

$$\frac{\bar{U}}{U_m} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \quad و \quad V = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} U_{max}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.04}{\frac{\pi}{4}(0.1)^2} = \frac{14}{\pi}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{\frac{16}{\pi} \times 0.1}{1.004 \times 10^{-6}} = \frac{1.6}{1.004\pi} \times 10^6 = 0.51 \times 10^6$$

$$\rightarrow n = 8$$

$$U_{max} = \frac{9 \times 17}{2 \times 8^2} V \simeq 1.2 \left(\frac{\pi}{16}\right) = 6.11$$

0.05 m ↕ ↕ 0.025 m

$$\tau_{کل} = \frac{1}{2} \frac{\Delta P}{l} r$$

$$\tau_{کل} = \frac{1}{2} \times 2.59 \times 1000 \times 0.025$$

$$\tau_{کل} = 0.5 \times 2.59 \times 25 = 32.37 \text{ Pa}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = -\mu \frac{du}{dr}$$

$$\bar{U} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$

$$\varepsilon = 0.01$$

$$\delta_v = ?$$

هم برای جریان آرام هم متلاطم

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{\Delta P}{l} r \quad , \; D/2$$

$$\tau_w = \frac{1}{2} \frac{\Delta P}{l} R = \frac{\Delta P}{4l} D$$

$$\tau_w = \frac{D}{4} \frac{\Delta P}{l} = \frac{0.1}{4} 2.59 \times 10^3 = 2.59 \times \frac{10^2}{4}$$

$$U^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = 5\sqrt{\frac{2.59}{998}}$$

$$\frac{U^* \delta_v}{\nu} = 5 \rightarrow \delta_v = \frac{5 \times 1.004 \times 10^{-6}}{5\sqrt{\frac{2.59}{998}}} = 1.004 \times 10^{-6} \sqrt{\frac{998}{2.59}}$$

$$\simeq 0.02 \text{ mm}$$

$\delta_v > \varepsilon \rightarrow$ صاف

$$\frac{\bar{U}}{U_{max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$

با توجه به اینکه ضخامت زیرلایه لزج بسیار کم است در صورتی که لوله را صاف در نظر بگیریم سرعت جریان را در مرکز لوله می توان با استفاده از سرعت متوسط و فرض یک توزیع سرعت بر اساس قانون توانی بدست آورد

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{R}\right)\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\tau_{آرام} = +\mu \frac{u_{max}}{Rn}\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}-1} = 0.028$$

$$\tau_{متلاطم} = \tau_{کل} - \tau_{آرام} = 32.37 - 0.03$$

مثال: آب در لوله صاف و افقی به قطر ۳ cm با لزجت سینماتیکی $10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$ و با دبی ۴ $\frac{L}{s}$ جریان دارد. با استفاده از رابطه

با توضیح قانون نمایی تائین کنید

الف) سرعت ماکسیمم ب) فاصله شعاعی در جایی که سرعت برابر سرعت متوسط شود

محاسبه سرعت ماکسیمم با استفاده از رابطه زیر

$$\frac{U_{max}}{U^*} = 2.44 \ln \frac{U^* R}{\nu} + 5.7$$

تنش برشی دیواره را 23 Pa در نظر بگیرید

قانون بقای انرژی برای جریان داخل لوله: افت فشار در لوله ها در نتیجه‌ی تغییر ارتفاع سیال، تغییر سرعت سیال به واسطه تغییر سطح مقطع و اصطکاک دیواره لوله ایجاد می‌شود

بنابراین در سیال حقیقی افت فشار توسط سه پارامتر تغییر سرعت، ارتفاع و تنش تعیین می‌شود

پرسش ۲: اگر سیال ایده آل بود (غیر لزج)؟ آنگاه افت فشار توسط دو پارامتر تغییر سرعت و تغییر ارتفاع تعیین می‌شود که در آن صورت از معادله برنولی استفاده می‌شود

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

m هد فشار / m هد دینامیکی / m هد استاتیکی

هد = انرژی / وزن = mg

$\gamma = \rho g$

در اکثر مسائل مهندسی سیال لزجت دارد و نمی‌توان از معادله برنولی استفاده کرد بلکه به سبب افزایش انرژی داخلی سیال و تبادل انرژی حرارتی با محیط

در واقع اصطکاک سبب می‌شود قسمتی از انرژی مکانیکی مفید سیال

Scanned by CamScanner

به گرما تبدیل می‌شود، بنابراین طبیعی است که این انرژی، اتلاف انرژی نسبت شود که در واقع تفاوت انرژی مکانیکی سیال در دو مقطع ورودی و خروجی است که آن را اتلاف هد کلی می‌نامیم

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_T$$

هد اتلاف کلی

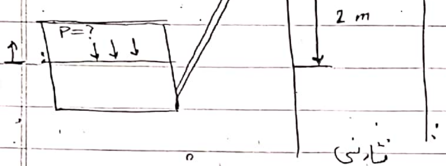
h_L ، h_m

هد اتلاف کلی به صورت حاصل جمع هد اتلاف اصلی و هد اتلاف موضعی در نظر گرفته می‌شود. هد اتلاف اصلی (h_L) در اثر اصطکاک به وجود می‌آید در صورتی که افت‌هایی که در خطوط لوله به علت خمیدگی‌ها، زانویی‌ها، شیرها به وجود می‌آیند که باعث تغییر شکل خطوط جریان می‌شوند هد اتلاف موضعی (h_m) و البته اتلاف‌های جزئی به علت وجود پدیده‌هایی مانند جدایی جریان و نواحی گردابه‌ای به وجود می‌آیند

معادله بقای انرژی را می‌توان برای محاسبه h_L در لوله‌ای مستقیم و با سطح مقطع ثابت استفاده کرد که در این صورت خواهیم داشت

$$h_L = \frac{\Delta P}{\gamma}$$

نمونه: لوله‌ای به قطر (۵ cm) از یک مخزن آتش‌نشانی آب را به سقف یک آسمان‌خراش پمپ می‌کند. افت اصطکاک (۵۰ سانتی‌متر آب) است. چه فشاری لازم است تا بتوان دبی ($15\ \frac{lit}{s}$) را روی سقف تخلیه کرد؟



$$V_2 = \frac{Q}{A} = \frac{15\times10^{-3}}{\frac{\pi}{4}(0.05)^2}$$

0.5

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_L + h_m$$

$$\frac{P}{\gamma} = \frac{(7.64)^2}{2\times9.8} + 2 + 0.5$$

$$P = 5.48 \times 9800$$

$$P_{abs} = P_{atm} + 5.48$$

محاسبه h_L در جریان آرام

$$u = V_c\left(1-\left(\frac{2r}{D}\right)^2\right)$$

یادآوری

$$\downarrow \quad \frac{\Delta P D^2}{16\mu l}$$

$$Q = \int_0^R u(2\pi r)\,dr = \frac{\pi D^2}{8} V_c$$

$$Q = \frac{\pi D^2}{8}\,\frac{\Delta P}{16\mu l} = \frac{\pi \Delta P D^4}{128\,\mu l}$$

$$\Delta P = \frac{128\,\mu l Q}{\pi D^4}$$

$$h_L = \frac{\Delta P}{\gamma}$$

$$h_L = \frac{128\,\mu l Q}{\rho g \pi D^4}, \qquad Q = VA = \frac{V\pi D^2}{4}$$

$$h_L = \frac{128\,\mu l}{\rho g \pi D^4}\, V\frac{\pi D^2}{4} = \frac{32\,\mu l V}{\rho g D^2}$$

$$h_L = \frac{64}{\frac{\rho V D}{\mu}}\,\frac{l}{D}\,\frac{V^2}{2g} = \left(\frac{64}{Re}\right)\frac{l}{D}\,\frac{V^2}{2g}$$

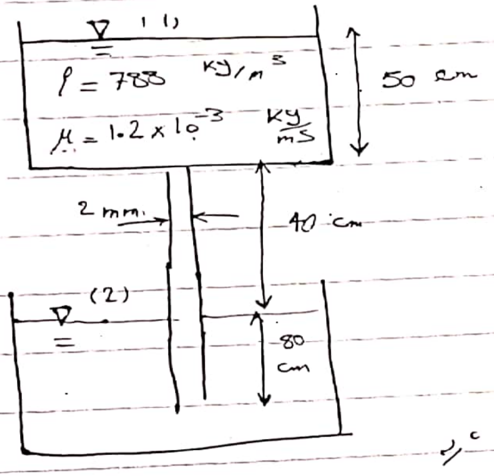
Re

www.nahal-alma.com

رابطه مهم

$$\boxed{h_L = \frac{64}{Re}\,\frac{l}{D}\,\frac{V^2}{2g}} \longrightarrow \text{در جریان آرام}$$

نمونه: مطابق شکل زیر سیالی تحت تأثیر وزن خود از یک مخزن از طریق لوله‌ای به قطر ۲mm وارد مخزن دیگری شود. اگر فشار در ۱ و ۲ atm باشد و جریان آرام باشد و اتلاف نداشته باشیم، دبی جریان را بیابید:



در سطح آزاد آب سرعت تقریباً صفر

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_L + h_m$$

$$0.9 = h_L \longrightarrow \boxed{h_L = 0.9}$$

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

$$h_L = \frac{128\,\mu L Q}{\rho g \pi D^4} \longrightarrow Q = \frac{\rho g \pi D^4 h_L}{128 \mu L}$$

$$= \frac{788 \times 9.8 \times \pi \times 2^4 \times 10^{-12} \times 0.9}{128 \times 1.2 \times 10^{-3} \times 1.2} = 1.89 \times 10^{-6} \ m^3/s$$

نکته)

$$\left.\begin{aligned} Re &= \frac{\rho V D}{\mu} \\ Q &= VA \end{aligned}\right\} \longrightarrow Re = \frac{\rho}{\mu}\,\frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\rightarrow V = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$Re = \frac{4Q}{\pi D \nu} = 790$$

پس فرض آرام بودن جریان منطقی می‌باشد

افت فشار در جریان متلاطم :

اگر جریان داخل لوله از نوع متلاطم باشد افت فشار را می‌توان از روش تحلیلی استفاده کرد

تجربه نشان داده است در جریان متلاطم داخل لوله وابسته به کمیت‌های زیر می‌باشد

1. قطر لوله (D)
2. طولی از لوله که در آن تغییر فشار مورد نظر است (l)
3. ضریب لزجت (μ)
4. سرعت متوسط (V)
5. جرم مخصوص (ρ)
6. زبری سطح لوله (ε)

این وابستگی‌ها به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\Delta P = F(D, l, \mu, V, \rho, \varepsilon)$$

تحلیل ابعادی با استفاده از قضیه باکینگهام نشان می‌دهد که

$$\frac{\Delta P}{\rho V^2} = F\left(\frac{l}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{\mu}{\rho V D}\right)$$

یا می‌توان نوشت

$$\frac{\Delta P}{\rho V^2} = f\left(\frac{l}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, Re\right)$$

(h_L)

www.nahal-alma.com

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

بنابراین خواهیم داشت:

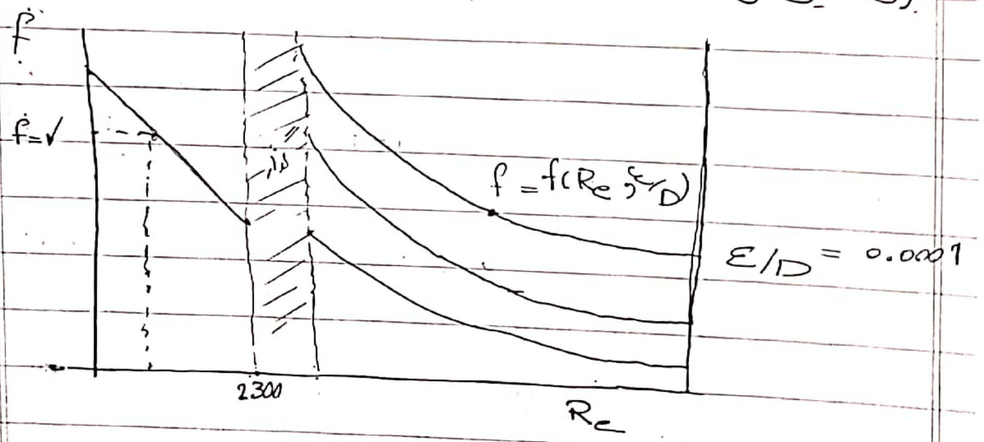
$$\frac{h_L}{V^2} = f\left(\frac{l}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, Re\right)$$

در نهایت تحلیل ابعادی نشان می‌دهد

$$h_L = f \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g}$$

که در آن f ضریب اصطکاک بوده و به صورت تجربی بدست می‌آید و معمولاً

برای تعین آن از نمودار مودی کمک گرفته می‌شود



مودی - وایس باخ

moody diagram

ضریب اصطکاک f به صورت تجربی بدست می‌آید

در شکل بالا حدود

در این نمودار محور افقی عدد رینولز را نمایش می‌دهد و محور عمودی ضریب

اصطکاک f است مقیاس هر دو محور از نوع لگاریتمی است

برای بدست آوردن f با توجه به عدد رینولز مشخص و $\frac{\varepsilon}{D}$، ابتدا

منحنی مربوط به $\frac{\varepsilon}{D}$ را انتخاب می‌کنیم و سپس عدد رینولز را از روی

محور افقی زیرین پیدا و از آنجا به صورت عمودی به بالا حرکت می‌کنیم تا منحنی

$\frac{\varepsilon}{D}$ انتخابی را قطع کند و بالاخره از این نقطه تقاطع به سمت چپ

حرکت می‌کنیم و f را می‌خوانیم

چنانچه منحنی مربوط به $\frac{\varepsilon}{D}$ مورد نظر بر روی نمودار moody ترسیم نشده باشد

باید موقعیت منحنی مورد نظر را بین دو منحنی با مقادیر $\frac{\varepsilon}{D}$ کوچکتر و بزرگتر

www.nahal-alma.com

تعیین شده و به عبارتی آن را درون این سیستم هم چنین می توان گفت در

جریان آرام ضریب اصطکاک برابر $\frac{64}{Re}$ یعنی ضریب اصطکاک فقط

به رینولدز وابسته و مستقل از زبری لوله است

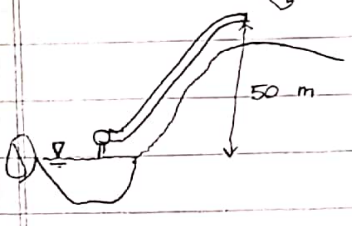
برای اعداد رینولدز بالا وابستگی ضریب اصطکاک به رینولدز از بین رفته و فقط

تابع $\frac{\varepsilon}{D}$ می باشد

نمونه: آب در دمای 15° سلسیوس و دبی $0.03\ m^3/s$ از طریق

لوله ای چدنی به قطر 80 mm و طول 200 m از دریاچه ای به بالای یک تپه پمپ

می شود توان لازم برای پمپ را حساب کنید:



ε	جنس
0.9 - 9	فولاد پرچ شده
0.3 - 3	بتن
0.18 - 0.9	چوب رنده شده
0.26	آهن چدنی
0.15	آهن گالوانیزه
0.12	آهن آسفالت شده
0.046	فولاد تجاری
0.0015	لوله صاف
صاف	شیشه

@ $t = 15^\circ C \rightarrow \nu = 1.12\times10^{-6}$

$Q = 0.03\ m^3/s$

$Re = \frac{VD}{\nu}$

$= \frac{4Q}{\pi D \nu}$

$= \frac{4\times3\times10^{-2}}{\pi\times80\times10^{-3}\times1.12\times10^{-6}} = \frac{12\times10^{6}}{8\pi\times1.12} = 4.3\times10^{5}$

$\simeq 4\times10^5$ } $f = 0.026$

$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.26}{80} = 0.00325$

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

$$h_L = f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g}, \quad V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = 5.97\ m/s \quad \Rightarrow h_L = 0.026 \times \frac{200}{80\times10^{-3}} \times \frac{5.97^2}{2\times9.81} = 118\ m$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + H_P = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_L + h_m$$

$$H_P = \frac{5.97^2}{2\times9.81} + 50 + 118$$

$$H_P = 1.82 + 50 + 118$$

(سرعت هد ح — غلبه بر ارتفاع — اصطکاک)

$$H_P = 169.82\ m$$

mgH, $\rho Q g H$, γ

$$\dot{W}_P = \gamma Q H_P$$

$$\dot{W}_P = \frac{9800\times0.03\times169.82}{1000} = 49.9\ KW$$

اتلاف های جزئی: افزون بر اتلاف های اصطکاک در طول لوله افت های دیگری تحت عنوان افتهای موضعی به دلایل زیر وجود دارد

1) ورودی یا خروجی لوله
2) بزرگ یا کوچک شدن ناگهانی لوله
3) اتصالات به کار رفته در لوله مانند زاویه و سه راهی
4) شیر در حالت باز یا نیمه باز
5) بزرگ یا کوچک شدن تدریجی مقطع

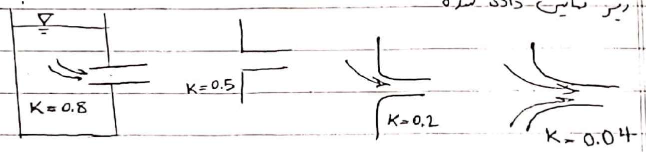
افت های جزئی ممکن است چندان کوچک نباشد مانند افت در یک شیر نیمه باز که حتی می تواند از یک لوله بلند صاف، افت فشار بیشتری ایجاد کند

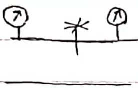
چون الگوی جریان در اتصالات و شیرها خیلی پیچیده است نمی توان درباره آنها یک تئوری قوی ارائه کرد و این افت ها را معمولا با آزمون اندازه گیری و با پارامترهای جریان ارتباط می دهند، افت جزئی اندازه گیری شده معمولا به صورت نسبتی از هد معادل تلف شده وسیله مورد نظر به هد معادل سرعت بسته یعنی $\frac{V_2}{2g}$ بیان می شود یعنی

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com

اتلاف موضعی در ورودی لوله

در ورودی لوله یعنی آنجایی که لوله به مخزن بزرگی وصل می‌شود ضریب افت به نحوه اتصال لوله به مخزن بستگی دارد که به طور شماتیک در اشکال زیر نمایش داده شده





$$K = \frac{h_m}{V^2/2g} = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

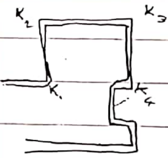
در انتهای لوله‌ها اگر لوله به مخزنی بزرگ وصل شده باشد ضریب افت را یک در نظر می‌گیریم (K = 1) این به این معناست که کل انرژی حرکتی به گرما تبدیل شده و هدر می‌شود

هد اتلاف موضعی

ضریب افت: $K = \frac{h_m}{V^2/2g} \rightarrow h_m = K \frac{V^2}{2g}$

K ضریبی است بدون بعد که مقدار آن بستگی به شکل و ابعاد قسمت های مختلف ارتباط دارد و در بیشتر موارد از آزمایش بدست می‌آید.

در سیستم‌های تک لوله‌ای ممکن است افت های جزئی مختلفی داشته باشیم که با $\frac{V^2}{2g}$ هر کدام در ارتباط‌اند که می‌توان نوشت:



$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

$$h_m = K_1 \frac{V^2}{2g} + K_2 \frac{V^2}{2g} + \cdots = (\sum K)\frac{V^2}{2g}$$

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$h_{tot} = f \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} + \sum K \frac{V^2}{2g} = (f \frac{l}{D} + \sum K) \frac{V^2}{2g}$$

وقتی یک لوله و قطر تغییر نکند

$$h_{tot} = (f \frac{l}{D} + \sum K) \frac{V^2}{2g}$$ *

www.nahal-alma.com

افت در انبساط ناگهانی لوله: در انبساط ناگهانی می‌توان افت موضعی یا جزئی را می‌توان به صورت تحلیلی برآورد کرد

مطابق شکل فاصله بین مقطع‌های ۲ تا ۳ را به عنوان حجم کنترل انتخاب می‌کنیم. مقطع 3 در محلی انتخاب شده که خطوط جریان به خطوط موازی و مستقیم تبدیل شده باشد تا بتوان جریان را یک بعدی فرض کرد

از تنش برشی ایجاد شده در گوشه‌ها را (گردابه‌ها) چشم‌پوشی می‌شود

فرض بر آن است که جریان در مقاطع ۱ و ۲ و ۳ یکنواخت است و فشار در سمت چپ حجم کنترل ثابت است یعنی:

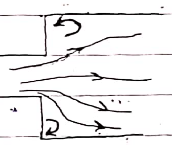
$P_a = P_b = P_c = P_1$

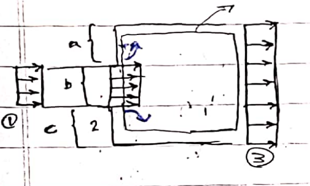
معادله‌های اندازه حرکت و پیوستگی و انرژی را برای حجم کنترل می‌نویسیم

معادلات پیوستگی و انرژی به ترتیب عبارتند از:

$$A_1 V_1 = A_3 V_3 \quad \text{و} \quad \left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + h_m\right) \star$$

که در آن h_m اتلاف جزئی ناشی از انبساط ناگهانی است





$P_a = P_b = P_c = P_1$

$$\Sigma F_x = \dot{m}\,(V_{out} - V_{in})$$

$$P_1 A_1 + P_1 (A_3 - A_1) - P_3 A_3 = \rho A_3 V_3 (V_3 - V_1)$$

$$\cancel{A_3}(P_1 - P_3) = \rho \cancel{A_3} V_3 (V_3 - V_1)$$

$$P_1 - P_3 = \rho V_3 (V_3 - V_1) \quad \text{(I)}$$

$$\star \rightarrow h_m = \frac{P_1 - P_3}{\gamma} + \frac{V_1^2 - V_3^2}{2g} \quad \text{(II)}$$

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

I, II $\longrightarrow$ $h_m = \frac{2V_3(V_3 - V_1)}{2g} + \frac{V_1^2 - V_3^2}{2g}$

$= \frac{2V_3^2 - 2V_3V_1 + V_1^2 - V_3^2}{2g} = \frac{V_3^2 - 2V_3V_1 + V_1^2}{2g}$

مهم

$$h_m = \frac{(V_3 - V_1)^2}{2g}$$

پیوستگی

$h_m = \frac{(V_3 - V_1)^2}{2g} = \frac{(V_1 - V_3)^2}{2g}$ ؛ $A_1V_1 = A_3V_3$

$V_1 = \frac{A_3}{A_1}V_3$

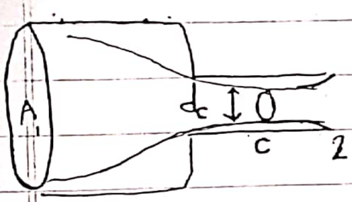
$h_m = \frac{(V_3 - \frac{A_3}{A_1}V_3)^2}{2g}$

$= \frac{(1 - \frac{A_3}{A_1})^2 V_3^2}{2g} \longrightarrow K = (1 - \frac{A_3}{A_1})^2$

۱. در انقباض ناگهانی تغییر شکل خطوط جریان در شکل زیر نشان داده شده که جریان در دهانه لوله نازکتر از لوله جدا شده و در مقطعی به نام مقطع جمع شده به حداقل می‌رسد.

جریان بین مقطع جمع شده که آن را c می‌نامیم و مقطع 2 شبیه به حالتی است که قطر به طور ناگهانی از d_c به d_2 تغییر می‌کند.

آزمایش‌ها نشان می‌دهد که بیشترین قسمت اتلاف انرژی بین مقطع‌های c و 2 رخ می‌دهد بنابراین اتلاف انرژی را می‌توان با استفاده از معادلاتی که در بالا بدست آوردیم به صورت زیر نوشت:



$h_m = (1 - \frac{A_2}{A_c})^2 \frac{V_2^2}{2g}$

$= (1 - \frac{A_c}{A_2})^2 \frac{V_c^2}{2g}$

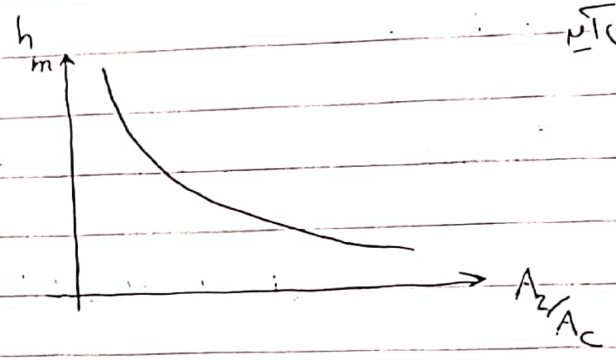
مقدار $\frac{A_c}{A_2}$ ضریب جمع‌شدگی می‌نامند و با C_c نشان می‌دهیم که خواهیم داشت

$$h_m = (1 - \frac{1}{C_c})^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

ضریب جمع شدگی چنانچه دیده می‌شود تابعی از A_2 و A_c می‌باشد

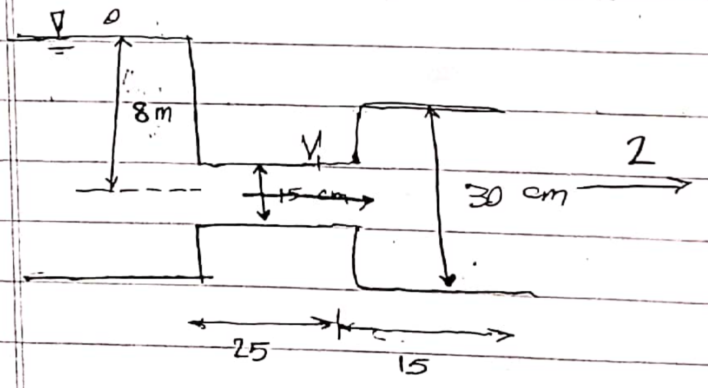
که با آن بدست می‌آید



نمونه: مطابق شکل زیر لوله ای به طول ۴۰ متر به مخزنی پر از

آب وصل شده و آب به atm تخلیه می‌شود، دبی حجمی آب را

حساب کنید. ضریب اصطکاک لوله ۰.۰۴ است



$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} + Z_0 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_m + h_L$$

$$0 = \frac{V_2^2}{2g} - 8 + 0.5\frac{V_1^2}{2g} + \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} + 0.04 \times \frac{25}{0.15}\frac{V_1^2}{2g} + 0.04 \times \frac{15}{0.3}\frac{V_2^2}{2g}$$

h_m , h_L

پیوستگی

$$\rightarrow A_1 V_1 = A_2 V_2 \longrightarrow V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 V_1 = \frac{1}{4} V_1$$

$\frac{(\frac{1}{4}V_1)^2}{2g}$ خالق $h_m = \frac{(V_1 - \frac{1}{4}V_1)^2}{2g}$

$$8 = \frac{V_1^2}{32g}(1+2) + \frac{V_1^2}{2g}\left(0.5 + \frac{1}{0.15}\right) + \frac{9 V_1^2}{32g}$$

$$8 = \frac{12 V_1^2}{32g} + \frac{V_1^2}{2g}\left(0.5 + \frac{1}{0.15}\right)$$

$$V_1 = 4.45 \ m/s$$

$$Q = V_1 A_1 = 4.45 \times 0.25\pi (0.15)^2 = 0.078 \ m^3/s$$

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

تمرین: در لوله ای به قطر 5cm و طول 5 متر و دبی 5 $\frac{lit}{s}$

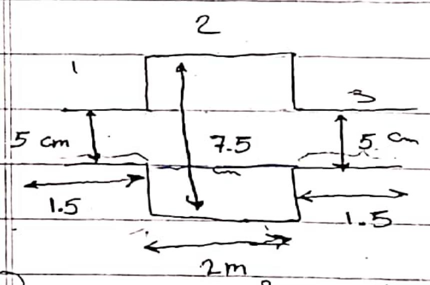
(1) افت هد را بر حسب اصطکاک محاسبه کنید (2) مطابق شکل

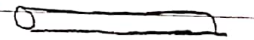
دو متر مرکزی لوله با لوله ی دیگری به قطر 7.5 cm جایگزین شود

هد معادل اتلاف را در این حالت معین کنید

مقدار ضریب اصطکاک برابر 0.01 (f) و ضریب افت مقطع تنگ شده را 0.5 (C_c)

فرض کرده و نیز جریان را متلاطم در نظر بگیرید





(1) $h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.01 \times \frac{5}{0.05} \times \frac{64}{2g\pi^2} = \frac{32}{g\pi^2}$

$V = \frac{Q}{A} \rightarrow V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 5\times10^{-3}}{\pi \times 25 \times 10^{-4}} = \frac{8}{\pi}$

(2) $V = \frac{8}{\pi} \rightarrow h_{L_{b2}} = 0.01 \times \frac{3}{0.05} \times \frac{64}{2g\pi^2} = \frac{192}{10g\pi^2} = \frac{19.2}{g\pi^2}$

$A_1V_1 = A_2V_2 \rightarrow V_2 = \frac{A_1}{A_2}V_1 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 V_1 = \left(\frac{5}{7.5}\right)^2 V_1 = \frac{32}{9\pi}$

$h_{L_2} = 0.01 \times \frac{2}{0.075} \times \frac{32^2}{162\pi^2 g} = \frac{20.48}{12.15g\pi^2} = \frac{1.68}{g\pi^2}$

$(h_L)_2 = \frac{20.88}{g\pi^2}$ $\qquad (h_L)_1 = \frac{32}{g\pi^2}$

انبساط ناگهانی $\rightarrow \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{\left(\frac{8}{\pi} - \frac{32}{9\pi}\right)^2}{2g} = \frac{9.87}{g\pi^2}$

انقباض ناگهانی $\rightarrow h_L = \frac{KV^2}{2g} = \frac{0.5\left(\frac{8}{\pi}\right)^2}{2g} = \frac{16}{g\pi^2}$

$h_m = \frac{9.87 + 16}{g\pi^2} = \frac{25.87}{g\pi^2}$

$h = h_L + h_m = \frac{20.88 + 25.87}{g\pi^2} = \frac{46.75}{g\pi^2}$ m

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

$$R_e = \frac{VD}{\nu} \quad \frac{4Q}{\pi D \nu} = Re$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{1}{\pi \times \frac{1}{36}} = \frac{36}{\pi} = 11.45 \ ft/s$$

$$Re = \frac{4}{1{,}1\pi} \times 10^5$$ متلاطم

$$\frac{\varepsilon}{D} = \checkmark$$

$\Longrightarrow$ moody $\quad f = 0{,}031$

$$H_p = 50 + \left(13{,}19 + 0.031 \times \frac{300}{2/12}\right) \frac{(11{,}45)^2}{2 \times 32.2}$$

$$= 50 + 140.44 = 190.44 \ ft$$

$$\frac{\text{انرژی}}{\text{وزن}} = H$$

$$\frac{\text{انرژی}}{mg} = H_p \longrightarrow \text{انرژی} = \gamma \dot{Q} H_p$$

$$= 62.4 \times 0.25 \times 190.44$$

$$= 2970.86 \ \frac{lbf \cdot ft}{s}$$

$1 \ hp = 550 \ \frac{lb\,ft}{s}$ $\quad h_p = \frac{2970.86}{550} = 5{,}4 \ hp$

$W_{in} \xrightarrow{\times 0.8} 5.4 \ hp$

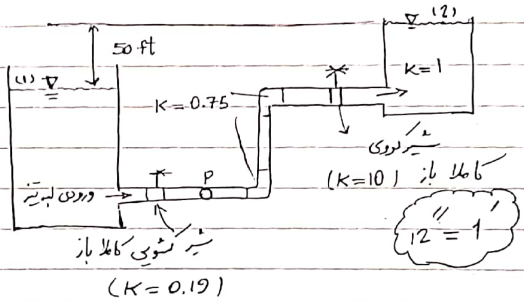
$$W_{in} = \frac{5.4}{0.8} = 6.75 \ hp$$

$$\gamma = 62.4 \ \frac{lbf}{ft^3}$$

مسئله: آب ($\nu = 1{,}1 \times 10^{-5} \ \frac{ft^2}{s}$) مطابق شکل از طریق یک لوله ($\varepsilon = 0{,}00085 \ ft$)

با قطر $2 in$ و طول $300 ft$ با دبی $\dot{Q} = 0{,}25 \ \frac{ft^3}{s}$

اگر بازده پمپ ٪۸۵ باشد، توان پمپ چند اسب بخار است



$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + H_p = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_L + h_m$$

$$(\Sigma K + f\frac{L}{D})$$

$$H_p = 50 + \left(\Sigma K + f\frac{l}{D}\right)\frac{V^2}{2g}$$

$$\Sigma K = 0.5 + 0.19 + 2 \times 0.75 + 10 + 1 = 13.19$$

محاسباتی که شرح آن گذشت درباره لوله با مقطع دایره‌ای بود گاهی اوقات لازم است

که افت انرژی را در لوله‌های با مقطع غیر دایره‌ای حساب کنیم

از روابط لوله با مقطع دایره‌ای می‌توان به شرط انجام اصطلاحات لازم در لوله

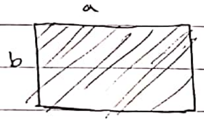
های غیر دایره‌ای استفاده کرد این کار با معرفی قطر هیدرولیکی در مقطع مختلف

انجام می‌شود قطر هیدرولیکی یا D_h به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\left(D_h = \frac{4A}{P} \right)$$

که در آن A مساحت تر شده و P محیط تر شده است برای

نمونه در یک کانال مستطیلی خواهیم داشت:

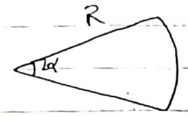


$$A = ab$$

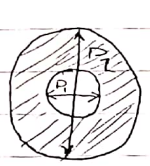
$$P = 2(a+b)$$

$$D_h = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\text{مربع} \longrightarrow D_h = \frac{2a^2}{2a} = a$$



$$D_h = \frac{4\alpha R^2}{2R+2R\alpha} = \frac{2\alpha R}{1+\alpha}$$



$$D_h = \frac{4 \times \frac{\pi}{4}(D_2^2 - D_1^2)}{\pi (D_1 + D_2)} = D_2 - D_1$$

$\gamma = 12 \ N/m^3$

نمونه: یک موتور برقی توسط یک فن هوا را ($\nu = 1.5 \times 10^{-5} \ m^2/s$)

از اتاقی به اتاق دیگر توسط یک کانال فولادی افقی به طول 100 m با دبی

$Q = 2 \ m^3/s$ انتقال می‌دهد که اگر سطح مقطع کانال مستطیلی $A = 0.5 \times 0.25 \ m$

$\varepsilon = 4.5 \times 10^{-5} \ m$

مطلوب است محاسبه‌ی

الف) هد اتلاف در طول کانال   ب) افت فشار در طول کانال

ج) توان لازم موتور برقی با فرض بازده این فن ٪80 باشد

$E = 0.000045$

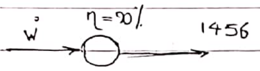
www.nahal-alma.com

www.nahal-alma.com

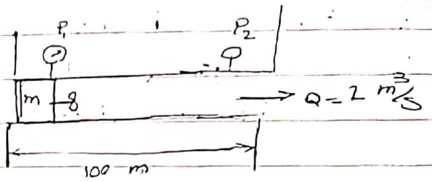
Scanned by CamScanner

$h_L = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} \longrightarrow \Delta P = h_L \gamma = 60.7 \times 12 = 728.4 \text{ Pa}$

$\dot{W}_e = \gamma Q H = \Delta P Q = 728.4 \times 2 = 1456.8 \text{ W}$



$\dot{W}_{in} = \frac{1456.8}{0.9} = \checkmark$



$h_L = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$

$D_h = \frac{2ab}{a+b} = 0.33$

$V = \frac{Q}{A} = \frac{2}{1/8} = 16 \text{ m/s}$

$R_e = \frac{V D_h}{\nu} = \frac{16 \times 0.33}{1.5 \times 10^{-5}} = \frac{16 \times 0.33}{1.5} 10^{5}$

$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4.5 \times 10^{-5}}{0.33}$

نمودار moody → $f = 0.01$

$h_l = 0.0155 \times \frac{100}{1/3} \times \frac{16^2}{2 \times 9.81} = 60.7 \text{ m}$

$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L$

www.nahal-alma.com

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

در این بخش می‌خواهیم ویژگی‌های عبور جریان از روی یک جسم را ببینیم. در جریان بیرونی نیروهای برا (لیفت) و پسا (درگ) چگونه به صورت تابعی از عدد رینولدز تغییر می‌کنند. همان‌گونه که قبلاً توضیح داده شد

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

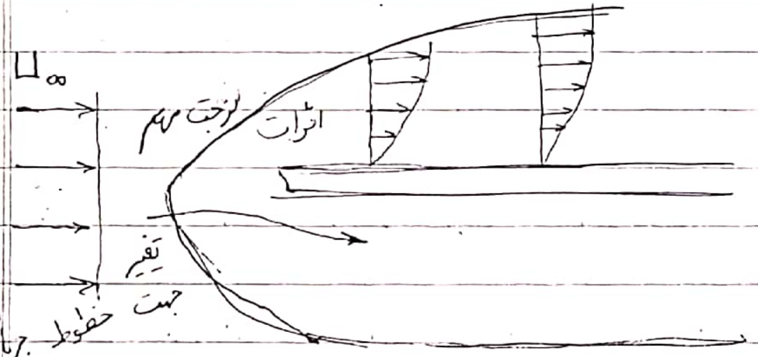
عدد رینولدز برابر است با نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت. درباره جریان‌های بیرونی که با آنها آشنا هستیم معمولاً اجسامی طرح می‌شوند که طول مشخصه آنها بین $0.1\ m$ تا $10\ m$ $(0.1 < L < 10)$ و سرعت جریان در آنها بین $0.01\ m/s < U < 100$ می‌باشد.

در صورتی که سیال نیز آب یا هوا باشد معمولاً عدد رینولدز در محدوده 10 تا 10^9 واقع خواهد شد $(10 < R_e < 10^9)$.

یک صفحه تخت را در نظر [بگیرید] که طول آن L و در آنها جریان‌های با رینولدز 0.1 و 10 و 10^7 وجود دارد.

آرام — آشفته

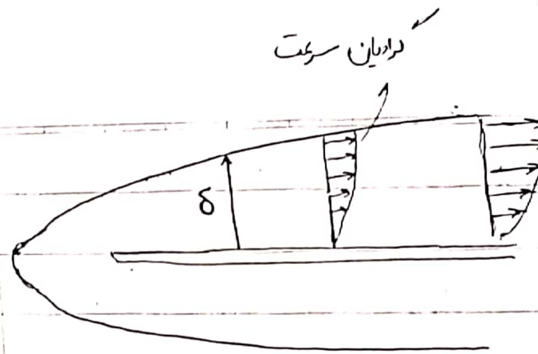
در عدد رینولدز 0.1 اثرات لزجت در تمام جهات مهم است، به عبارتی اگر عدد رینولدز کوچک باشد ناحیه لزج وسیع و با فاصله زیادی در دو طرف صفحه اتفاق می‌افتد. با افزایش عدد رینولدز (مثلاً افزایش سرعت) ناحیه‌ای که در آن اثرات لزجت مهم است کوچکتر می‌شود، با افزایش بیشتر عدد رینولدز، جریان تحت اثر نیروهای اینرسی قرار می‌گیرد و اثرات لزجت قابل چشم‌پوشی است به جز در ناحیه نزدیک به صفحه.



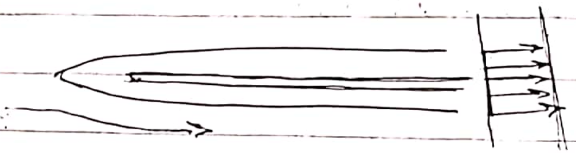
$R_e = 0.1$

تغییر پروفیل سرعت همراه با (متناسب با) عدد رینولدز.

$\frac{u}{U} = 0.99$ تعریف کتاب ها



$R_e = 10$



$R_e = 10^7$

تغییر جهت ناچیز خطوط جریان

در واقع چون لزجت جریان صفر نیست ($\mu \neq 0$) در نتیجه سیال باید به سطح جامد بچسبد (شرط عدم لغزش) و در نتیجه یک ناحیه لایه مرزی باریک با ضخامت $\delta(x)$ در طول صفحه وجود خواهد داشت که در این لایه در روی صفحه سرعت صفر بوده و در نهایت سرعت به مقدار سرعت آزاد می رسد.

ضخامت این لایه از لبه جلوی صفحه در جهت جریان افزایش می یابد.

جریان در داخل لایه مرزی می تواند آرام یا متلاطم (بستگی به عدد رینولدز دارد)

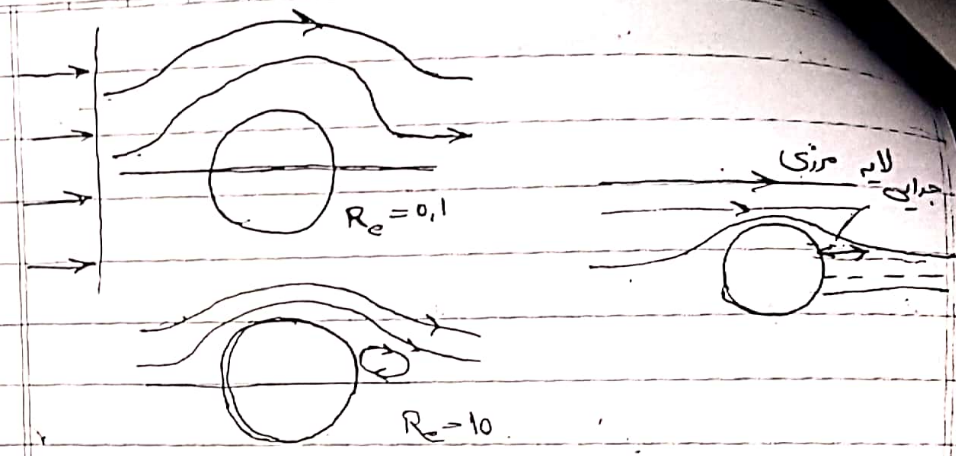
واسد

پرانتل در سال ۱۹۰۴ نخستین بار مفهوم لایه مرزی را بیان کرد که این مفهوم حلقه ی ارتباطی بسیار مهمی میان جریان ایده آل سیال و جریان حقیقی سیال می باشد که این مطلب در آینده بیشتر توضیح داده خواهد شد.

همچنین برای جریان از روی اجسام غیر جریانی شکل مانند یک استوانه می توان رابطه بین ضخامت لایه مرزی و عدد رینولز را بررسی کرده

در رینولزهای بسیار پایین مثلاً حدود ۱ اثرات لزجت در تمام جهات مهم است. با بزرگتر شدن عدد رینولز ناحیه ای تحت تاثیر نیروهای لزجت قرار دارد که به سمت پایین دست جریان شیفت پیدا می کنند تا اینکه یک لایه مرزی باریک در جلوی استوانه و یک ناحیه برخواستگی نامنظم در پشت آن به وجود می آید و مانند قبل در خارج از لایه مرزی می توان ایده آل در نظر گرفت

www.nahal-alma.com



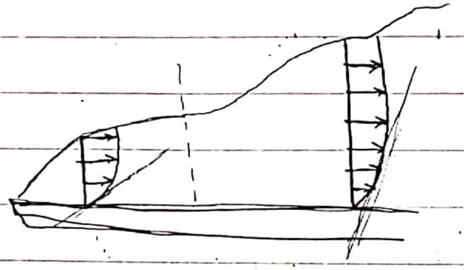
* جریان = جریان لزج + جریان غیر لزج *

ویژگی های لایه مرزی:

ضخامت و ساختار لایه مرزی بر روی صفحه: هنگامی که لایه مرزی‌ای بر روی صفحه شروع به تشکیل می‌کند در ابتدا یک لایه مرزی آرام خواهد بود، اما با ادامه حرکت بر روی صفحه آثار ناپایداری در المان‌های سیال ظاهر شده و دیگر نمی‌توان حرکت سیال را آرام در نظر گرفت. این آثار ناپایداری در حوالی نقطه‌ای رخ می‌دهد که در آن عدد رینولدز بین 2×10^5 تا 3×10^6 می‌باشد که به آن رینولدز بحرانی می‌گویند

و به عواملی همچون زبری صفحه، ارتعاش صفحه، میزان تلاطم در جریان آزاد و عواملی از این دست بستگی دارد. پس از ناپایداری در جریان لایه‌ی مرزی ناحیه‌ی انتقالی یا گذر آغاز می‌شود که در آن رفتار سیال نه دقیقاً به جریان آرام شباهت دارد نه به جریان متلاطم شباهت دارد.

از ویژگی‌های مهم لایه مرزی متلاطم رشد سریع‌تر لایه‌ی مرزی و تا حدودی تخت بودن منحنی توضیع سرعت است، در لایه مرزی آرام رشد لایه مرزی آهسته‌تر صورت می‌گیرد و توضیع سرعت به شکل سهمی شکل است



شیب $\frac{du}{dy}$

$\tau = \mu \frac{du}{dy}$

لایه مرزی آرام — لایه مرزی متلاطم

شیب بیشتر: متلاطم > آرام

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

به عبارتی دیگر تغییرات سرعت نزدیک به دیواره یا گرادیان سرعت نزدیک به دیواره و در نتیجه تنش برشی در ناحیه‌ی متلاطم بزرگ‌تر است و بنابراین اندازه حرکت سیال نزدیک دیواره در لایه مرزی متلاطم بزرگتر است.

برای تعیین میزان وسعت و اندازه‌ی لایه مرزی از مفهومی با عنوان ضخامت لایه‌ی مرزی که آن را با (δ) نشان می‌دهیم (فاصله‌ای از سطح جسم جامد که طبق تعریف است که سرعت در آنجا برابر ۰٫۹۹ سرعت جریان جریان آزاد است (جریان آزاد، جریان خارج از لایه مرزی) می‌باشد) یا به صورت ریاضی:

$$y = \delta \longrightarrow u = 0.99\,U_\infty$$

این فاصله مقدار کاملاً مشخصی نیست بنابراین باید ضخامت دیگر برای لایه مرزی مشخص شود، یکی از این مفاهیم مهم ضخامت جابه‌جایی است که آن را با δ^* نشان می‌دهیم.

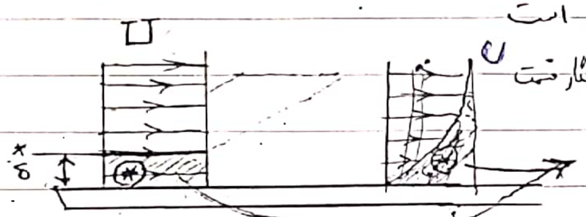
به دلیل آنکه سرعت در لایه مرزی u است و قطعاً می‌دانیم که این سرعت از سرعت جریان آزاد یعنی U کوچکتر است از این رو دبی جریان در ناحیه‌ی لایه‌ی مرزی از دبی جریانی که می‌توانست در صورت نبود گرادیان سرعت بالزر کمتر خواهد بود. حال اگر صفحه را به اندازه‌ی δ^* جابه‌جا کنیم تا این دبی‌های جریان یکنواخت شود آن را ضخامت جابه‌جایی می‌گوییم و باید داشته باشیم

$$\delta^* b U = \int_0^\delta (U-u)\, b\, dy$$

دبی

که در آن b عرض صفحه است

یکی هستند، با حذف (*) انگار تحت (*) را تخمین زدیم



ضخامت جابه‌جایی

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1-\frac{u}{U}\right) dy$$

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

طرفین را تقسیم بر

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left(1-\frac{u}{U}\right) d\eta$$

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

برای ضخامت لایه‌ی مرزی ضخامت دیگری به‌نام ضخامت مومنتوم تعریف می‌شود که آن را با Θ نشان می‌دهیم. دوباره یادآوری می‌کنیم که چون u از U کوچکتر است مومنتوم جریان نسبت به مومنتوم جریان آزاد کوچکتر خواهد بود، به عبارتی

$$\rho U^2 b\Theta = \rho \int_0^\delta u(U-u)\,b\,dy$$

$$\Theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

$$\frac{\Theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)d\eta$$

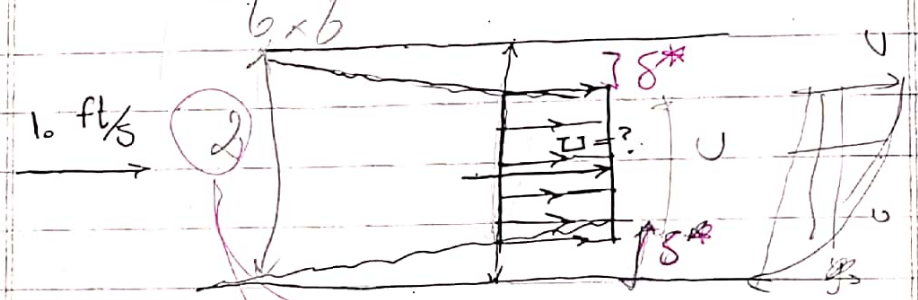
ضخامت مومنتوم

نسبی که نیست

مرزی

مثال: هوا از یک کانال $2\,ft$ فوتی با سرعت یکنواخت $10\,ft/s$ جریان می‌یابد و ورودی دیواره‌ها یک لایه‌ی مرزی بوجود می‌آید.

اگر ضخامت جابه‌جایی به‌صورت $\delta^* = 0.007\sqrt{x}$ باشد که در آن δ^* و x برحسب فوت است، سرعت هوا را در خارج از لایه مرزی بیابید:



حل:

$$10\times2\times2 = U\left(2-2\times0.007\sqrt{x}\right)\left(2-2\times0.007\sqrt{x}\right)$$

$$U = \frac{40}{4(1-0.007\sqrt{x})^2} = \frac{10}{(1-0.007\sqrt{x})^2}$$

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

معادله توضیح سرعت در یک لایه مرزی عبارت است از:

$$\frac{u}{U} = \underbrace{\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)}_{a} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2}_{b}$$

مطلوب است محاسبه $\frac{\theta}{\delta}$ و $\frac{\delta^*}{\delta}$.

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^2\right) d\eta$$

$$= \eta - \frac{3\eta^2}{4} + \frac{\eta^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\rightarrow \boxed{\delta^* = \frac{5}{12}\delta}$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \rightarrow \dots$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U} - \left(\frac{u}{U}\right)^2 d\eta = \int_0^1 \frac{u}{U} d\eta - \int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right)^2 d\eta$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^2\right) - \int_0^1 \left(\frac{9}{4}\eta^2 - \frac{3}{2}\eta^3 + \frac{1}{4}\eta^4\right) d\eta$$

www.nahal-alma.com

معادلات جریان در لایه مرزی آرام:

برای جریان دو بعدی، پایا و تراکم ناپذیر در لایه مرزی معادلات ناویر استوکس و پیوستگی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \longrightarrow u = v = 0 \\ y = \delta \longrightarrow u = U \end{cases}$$ شرایط مرزی

که البته حل کامل این معادلات بدون استفاده از روش های عددی امکان پذیر است اما با در نظر گرفتن شرایط جریان در لایه مرزی آرام می توان آنها را به معادلات تقریبی ساده تری تبدیل کرد.

www.nahal-alma.com

...ین معنا که جملاتی که در این معادلات که به نظر می‌رسد در مقابل

دیگر جملات که خیلی کوچک اند حذف می‌شوند

برای مقایسه‌ی اندازه بزرگی و کوچکی جملات در این معادلات به روش زیر عمل می‌شود

اگر درجه بزرگی x در محاسبات لایه مرزی 1 در نظر گرفته شود درجه بزرگی ($x \sim 1$)

y، درون لایه مرزی $\delta \sim y$ خواهد بود و پر واضح است δ خیلی از

یک کوچکتر است هم چنین اگر درجه بزرگی U_∞ برابر واحد در نظر گرفته شود

$U_\infty \sim 1$ $\qquad \delta \lll 1$

چون u نیز در لبه لایه مرزی برابر U_∞ می‌شود پس درجه بزرگی u نیز

برابر یک در نظر گرفته می‌شود به این ترتیب درجه‌ی جملات به صورت زیر مشخص

می‌شود:

$x \sim 1 \qquad U_\infty \sim 1 \qquad \delta \lll 1$

$y \sim \delta \qquad u \sim 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim 1 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} \sim 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \sim \frac{1}{\delta^2}$$

م. پیوستگی : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} \sim 1$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\partial u}{\partial x}$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} \sim 1 \longrightarrow v \sim \delta$

$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \delta$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \sim \frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \sim \delta$$

با استفاده از درجه‌ی بزرگی جملات خواهیم داشت:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$1 \quad 1 \qquad \delta \quad \frac{1}{\delta} \qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad + \delta\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)$$

www.nahal-alma.com
www.nahal-alma.com
Scanned by CamScanner

همچنین پارامتر δ چون درجه بزرگی ۱ مربوط به جمله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در مقایسه با

درجه $\frac{1}{\delta^2}$ مربوط به جمله‌ی $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ بسیار کوچکتر است پس می‌توانیم از

جمله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در مقایسه با $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ چشم‌پوشی کنیم.

این پارامتر در واقع ناشی از اثرات لزجت است و چون اثرات لزجت در لایه

مرزی مهم است درجه جمله $\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ دست کم باید برابر اندازه بزرگی

جملات دیگر یعنی 1 (یک) شود.

بنابراین:

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim 1 \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \to \frac{1}{\delta^2}\right)$$

$$\boxed{\nu \sim \delta^2}$$

به علاوه چون جمله‌ی مربوط به تغییرات فشار باید قابل مقایسه با سایر جملات

باشد باید $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ نیز از درجه یک باشد

اینک بپردازیم به معادله دوم

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$1 \quad \delta \qquad \delta \quad 1 \qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad + \delta^2\left(\delta \qquad \frac{1}{\delta}\right)$$

در اینجا نیز مشخص است در آخرین پارامتر δ از $\frac{1}{\delta}$ بسیار کوچکتر است بنابر

این از جمله $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ در مقابل $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ چشم‌پوشی کرد و درجه بزرگی جمله‌ی $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$

می‌بایست مانند سایر جملات یعنی برابر δ باشد

بنابراین درجه بزرگی شیب تغییرات فشار در امتداد y در داخل لایه مرزی برابر

با δ^2 است

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \sim \delta \quad \rightarrow \quad \partial p \sim \delta^2$$

از آنچه گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که چون درجه بزرگی V برابر δ است در مقابل

u که درجه بزرگی آن برابر با واحد است می‌توان چشم‌پوشی کرد و در نهایت

این معادله به صورت:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

ساده می شود بنابراین می توانیم معادله ساده شده لایه مرزی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

✓ این معادلات که به معادلات پرانتل معروف اند در تمام نقاط لایه مرزی آرام، دو بعدی، پایا و تراکم ناپذیر صادق هستند

حل معادلات لایه مرزی آرام در صفحه (روش پرانتل-بلازیوس):

حل عددی این معادلات در سال ۱۹۰۸ به وسیله بلازیوس که یکی از شاگردان پرانتل بود منتشر شد که معادله با مشتقات جزئی را به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد و شروع به حل آن نمود که در اینجا به روش آن نمی‌پردازیم و داریم

$$2f''' + ff'' = 0$$

که در آن f تابعی از $\left(\frac{y}{\delta}\right)$: $f = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ (η)

✓ از نتیجه روش عددی می توان ثابت کرد که:

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \qquad \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\frac{\delta}{x} = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U x^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{Ux}{\nu}}} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

www.nahal-alma.com

...چنین ترتیب از حل بلازیوس نتایج زیر بدست آمد

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1.721}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

هم چنین تنش برشی در صفحه از رابطه زیر بدست می آید

$$\tau_w = 0.332\, U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho\mu}{x}}$$

حل جریان لایه مرزی به روش انتگرال (ون کارمن):

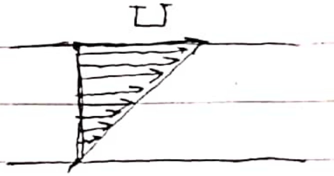
ون کارمن نشان داد که در لایه مرزی روی یک صفحه با سرعت ثابت U

تنش برشی دیواره از رابطه زیر بدست می آید

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}$$

مهم

مثال: ترالم نالوزیری با جریان آرام در نظر بگیرید که از روی یک صفحه تخت عبور می کند. توضیح سرعت لایه مرزی را خطی در نظر گرفته و با روش ون کارمن تنش برشی دیواره را محاسبه کنید و نتیجه را با نتیجه بلازیوس مقایسه کنید:



$$u = \frac{U}{\delta} y \rightarrow \frac{u}{U} = \frac{y}{\delta} = \eta$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \eta(1-\eta)\,d\eta = \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{3}\Big|_0^1$$

$$\rightarrow \theta = \frac{1}{6}\delta$$

$$\tau_w = \rho U^2 \times \frac{1}{6}\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{6}\rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad \text{(II)}$$

از طرفی $\rightarrow \tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta}$

$$\rightarrow \mu\frac{U}{\delta} = \frac{1}{6}\rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

www.nahal-alma.com

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner

$$\delta \, d\delta = \frac{6\mu}{\rho U} dx$$

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{6\mu x^2}{\rho U x} = \frac{6x^2}{\frac{\rho U x}{\mu}}$$

$$\delta^2 = \frac{12x^2}{Re_x} \rightarrow \delta = \frac{3.4x}{\sqrt{Re}} \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{3.4}{\sqrt{Re_x}}$$

نمونه: اگر معادله توضیح سرعت در لایه مرزی یک عبارت درجه دوم به صورت $u = a + by + cy^2$ می‌باشد که در آن a و b و c مقادیر ثابت اند تنش برشی را بیابید و آن را با نتیجه‌ی بلازیوس مقایسه کنید

$y = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow a = 0$

$y = \delta \rightarrow u = U$

$y = \delta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$\Big\} \; b, c = ? \rightarrow \Big\{ \; y = 0, \; \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0$

در اول a و b و c تعیین شود

www.nahal-alma.com

www.nahal-alma.com

Scanned by CamScanner